



Une approche signal des systèmes multiporteuses OFDM: L'OFDM et ses variantes...

Dr. Marc de Courville

Courville.org

marc@courville.org

Septembre 2004

Plan

- ① Les précodeurs redondants : une solution pour simplifier l'égalisation
 - ① Modélisation vectorielle du canal
 - ② Deux approches duales pour réaliser une égalisation simple du canal
 - ③ Un égaliseur pour le modulateur ZP-OFDM garantissant la récupération des symboles émis
 - ④ Une structure rapide garantissant la récupération des données
 - ⑤ Estimation du canal de propagation
- ② Cyclostationnarité dans les systèmes OFDM à précodeur redondant
 - ① Cyclostationnarité et calcul de spectre
 - ② Identification aveugle du canal de transmission : méthode directe pour le modulateur CP-OFDM
 - ③ Identification aveugle du canal de transmission : méthode sous-espace pour le modulateur ZP-OFDM



Les précodeurs redondants : une solution pour simplifier l'égalisation

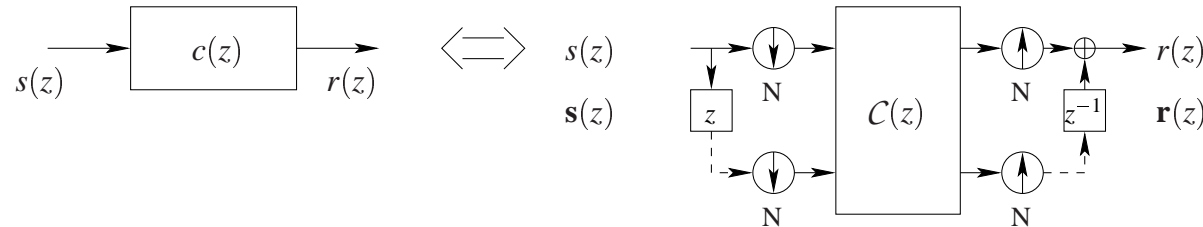
- ✓ Deux types de précodeurs redondants vont être présentés :
 - ✗ le CP-OFDM classique consistant à une duplication circulaire de la fin du bloc en son début (Cyclic Prefix)
 - ✗ son dual le ZP-OFDM correspondant la concaténation d'un bloc de zéros en fin de bloc (Zero Padding)
- ✓ et diverses manières de les égaliser en adoptant une approche vectorielle bloc

- ✓ **But ultime** : proposer un modulateur alternatif dual et souligner ses avantages



Modélisation vectorielle du canal

- ✓ **But** : expression de la matrice polyphase de filtrage



- ✓ **Taille du bloc** : N pour le moment arbitraire

$$s(z) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k(z^N)z^{-k}, r(z) = \sum_{k=0}^{N-1} r_k(z^N)z^{-k}, C(z) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k(z^N)z^{-k}$$

- ✓ **Convolution linéaire** :

$$r(z) = C(z)s(z) = \sum_{k,k' \in \mathbb{N}_N^2} s_k(z^N)C_{k'}(z^N)z^{-k-k'}$$



✓ Expression des composantes polyphases du signal reçu $r(z)$:

$$r_l(z) = \sum_{k=0}^l s_k(z)C_{l-k}(z) + \sum_{k=l+1}^{N-1} s_k(z)C_{N+l-k}(z), \quad 0 \leq l < N$$

$$\mathbf{r}(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} C_0(z) & z^{-1}C_{N-1}(z) & \cdots & z^{-1}C_2(z) & z^{-1}C_1(z) \\ C_1(z) & C_0(z) & \searrow & & z^{-1}C_2(z) \\ \vdots & \searrow & \searrow & \searrow & \vdots \\ \vdots & & \searrow & \searrow & z^{-1}C_{N-1}(z) \\ C_{N-1}(z) & C_{N-2}(z) & \cdots & C_1(z) & C_0(z) \end{bmatrix}}_{C(z)} \mathbf{s}(z)$$

✓ matrice $C(z)$ $N \times N$, $\mathbf{r}(z) = [r_0(z), \dots, r_{N-1}(z)]^T$ et $\mathbf{s}(z) = [s_0(z), \dots, s_{N-1}(z)]^T$



Modélisation scalaire vectorielle de la convolution

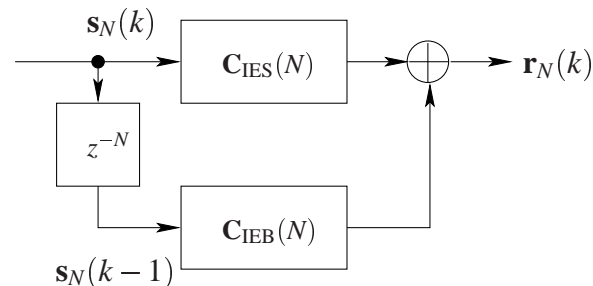
- ✓ Intervalle de garde (D échantillons) choisi tel que $D > L$ mémoire du canal
- ✓ choisissons N tel que $N > D$, le canal $\mathbf{c}_N = (c_0, \dots, c_{N-1})^T$
- ✓ $C(z)$ se simplifie :

$$C(z) = \begin{bmatrix} c_0 & c_{N-1}z^{-1} & \cdots & c_2z^{-1} & c_1z^{-1} \\ c_1 & c_0 & \searrow & & c_2z^{-1} \\ \vdots & \searrow & \searrow & \searrow & \vdots \\ \vdots & & \searrow & \searrow & c_{N-1}z^{-1} \\ c_{N-1} & c_{N-2} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\text{ISI}}(N) + z^{-1}\mathbf{C}_{\text{IBI}}(N)$$



✓ $\mathbf{C}_{\text{ISI}}(N)$, $\mathbf{C}_{\text{IBI}}(N)$ matrices scalaires Toeplitz carrées $N \times N$

$$\mathbf{C}_{\text{ISI}}(N) = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & \rightarrow & 0 \\ c_1 & \searrow & \searrow & \downarrow \\ \vdots & \searrow & \searrow & 0 \\ c_{N-1} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_{\text{IBI}}(N) = \begin{bmatrix} 0 & c_{N-1} & \cdots & c_1 \\ \downarrow & \searrow & \searrow & \vdots \\ \downarrow & & \searrow & c_{N-1} \\ 0 & \rightarrow & \rightarrow & 0 \end{bmatrix}$$



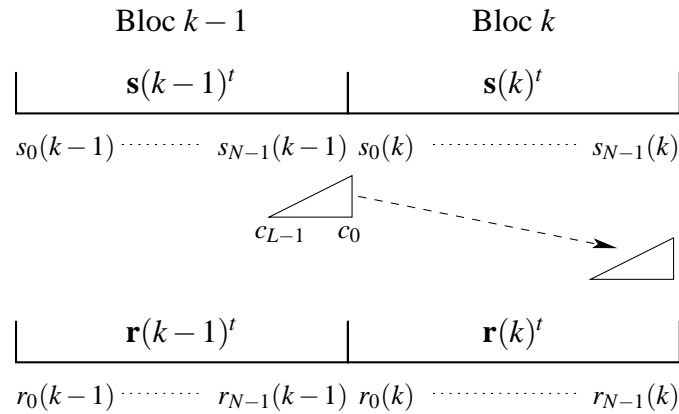
$$\mathbf{r}_N(k) = \mathbf{C}_{\text{ISI}}(N)\mathbf{s}_N(k) + \mathbf{C}_{\text{IBI}}(N)\mathbf{s}_N(k-1)$$

- ✗ $\mathbf{C}_{\text{ISI}}(N)\mathbf{s}_N(k)$: interference entre symboles intrabloc
- ✗ $\mathbf{C}_{\text{IBI}}(N)\mathbf{s}_N(k-1)$: interference interblocs introduite par la mémoire du canal



Vision canal glissant

✓ Une manière plus intuitive de formaliser la convolution bloc :



$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_N(k) &= \boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}_N) \begin{bmatrix} \mathbf{s}(k-1) \\ \mathbf{s}(k) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\text{ISI}}(N)\mathbf{s}_N(k) + \mathbf{C}_{\text{IBI}}(N)\mathbf{s}_N(k-1) = [\mathbf{C}_{\text{IBI}}(N), \mathbf{C}_{\text{ISI}}(N)] \begin{bmatrix} \mathbf{s}_N(k-1) \\ \mathbf{s}_N(k) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & c_{N-1} & \cdots & c_1 & c_0 & 0 & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & \searrow & \searrow & \vdots & c_1 & \searrow & \searrow & \downarrow \\ \downarrow & & \searrow & c_{N-1} & \vdots & \searrow & \searrow & 0 \\ 0 & \rightarrow & \rightarrow & 0 & c_{N-1} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}_{N \times 2N} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_N(k-1) \\ \mathbf{s}_N(k) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



Deux approches duales pour réaliser une égalisation simple du canal : motivation

- ✓ **Problème** : oublier son passé qui nous corrompt, l'IBI...

$$\mathbf{r}_N(k) = \mathbf{C}_{\text{ISI}}(N)\mathbf{s}_N(k) + \mathbf{C}_{\text{IBI}}(N)\mathbf{s}_N(k-1)$$

- ✓ **Comment** : modifier le signal émis en introduisant de la redondance, D échantillons pour un bloc N
- ✓ **Rappel** : les systèmes OFDM sont conçus de telle sorte que la redondance est limitée $N > D$ (HL2, DAB etc. < 25% de perte en débit)

$$\mathbf{c}_N = (c_0, \dots, c_{N-1})^T = (c_0, \dots, c_D, 0, \dots, 0)^T, \text{ avec } c_k = 0 \text{ pour } k > D$$



✓ Simplification :

$$\mathbf{C}_{\text{ISI}}(N) = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & 0 \\ \vdots & \searrow & \searrow & & & \downarrow \\ c_D & & \searrow & \searrow & & \downarrow \\ 0 & \searrow & & \searrow & \searrow & \downarrow \\ \downarrow & \searrow & \searrow & & \searrow & 0 \\ 0 & \rightarrow & 0 & c_D & \cdots & c_0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{C}_{\text{IBI}}(N) = \begin{bmatrix} 0 & \rightarrow & 0 & c_D & \cdots & c_1 \\ \downarrow & \searrow & & \searrow & \searrow & \vdots \\ \downarrow & & \searrow & & \searrow & c_D \\ \downarrow & & & \searrow & & 0 \\ \downarrow & & & & \searrow & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & 0 \end{bmatrix}$$

✓ Compte tenu des structures des matrices deux choix de redondances sont possibles

✗ une duplication circulaire de la fin du bloc en son début (Cyclic Prefix)

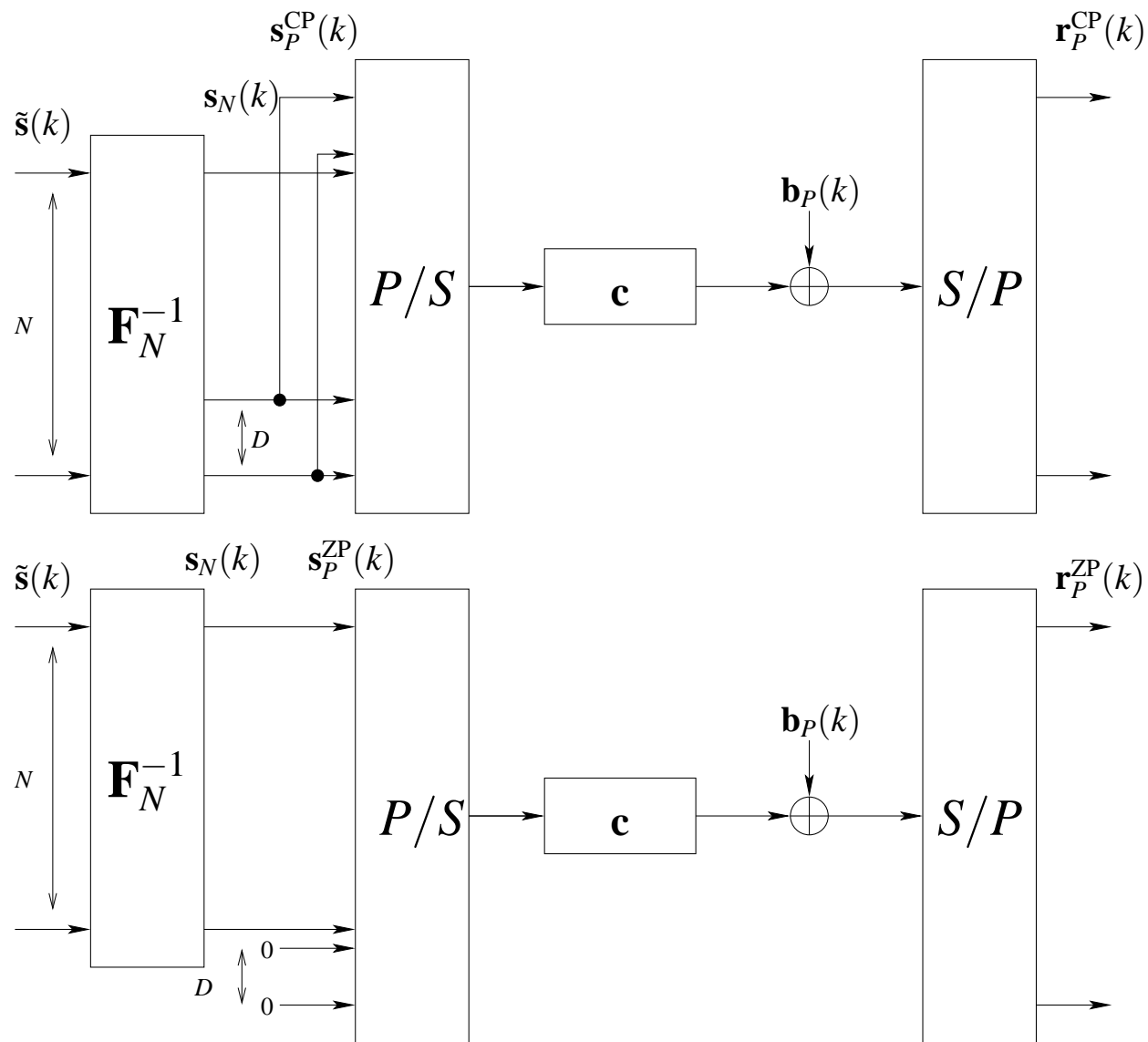
✗ la concaténation d'un bloc de zéros en fin de bloc (Zero Padding)

⇒ Deux types spécifiques de précodeur redondant présentés

✓ **But** : montrer que ces propositions mènent à une égalisation simple dans le domaine fréquentiel



Égaliser simplement le canal : approches duales



Formalisation bloc des modulateurs

- ✓ $P = N + D$ taille des vecteurs après introduction de redondance
- ✓ $\mathbf{s}_P^{\text{CP}}(k)$ et $\mathbf{s}_P^{\text{ZP}}(k)$: signaux temporels émis après modulation $\mathbf{s}_N(k) = \mathbf{F}_N^H \tilde{\mathbf{s}}(k)$

$$\mathbf{s}_P^{\text{CP}}(k) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{D,N-D} & \mathbf{I}_D \\ \hline \mathbf{I}_N & \end{array} \right] \mathbf{s}_N(k) \quad \text{et} \quad \mathbf{s}_P^{\text{ZP}}(k) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{I}_N \\ \hline \mathbf{0}_{D,N} \end{array} \right] \mathbf{s}_N(k)$$

- ✓ $[\mathbf{0}_{D,N-D} | \mathbf{I}_D]$: concaténation du CP
- ✓ Ajout de la redondance \mathbf{M} :

$$\mathbf{M}_{\text{CP}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{D,N-D} & \mathbf{I}_D \\ \hline \mathbf{I}_N & \end{array} \right]_{N \times P} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{\text{ZP}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{I}_N \\ \hline \mathbf{0}_{D,N} \end{array} \right]_{N \times P}$$

- ✓ Signal reçu ($\mathbf{b}_P(k)$ bruit AWGN variance σ_b^2) : $\mathbf{M} \in \{\mathbf{M}_{\text{ZP}}, \mathbf{M}_{\text{CP}}\}$

$$\mathbf{r}_P(k) = \mathbf{C}_{\text{ISI}}(P) \mathbf{M} \mathbf{s}_N(k) + \mathbf{C}_{\text{IBI}}(P) \mathbf{M} \mathbf{s}_N(k-1) + \mathbf{b}_P(k)$$



Deux manières de rendre une convolution circulaire

- ✓ **Inspiration** : techniques de filtrage rapide à base de FFT : l'Overlapp and Add (OLA) et l'Overlapp and Save (OLS)
- ✓ **Principe** :
 - ✗ adopter une approche vectorielle
 - ✗ considérer dans les étapes intermédiaires de calcul des blocs de données de taille plus importante
 - ✗ tel que le calcul puisse être effectué par convolution circulaire
 - ✗ s'assurer qu'une sous-partie du résultat correspond effectivement au filtrage linéaire souhaité
 - ✗ utiliser la propriété de diagonalisation de l'algèbre des matrices circulaires par la transformée de Fourier
 - ✗ implanter l'opération de convolution cyclique à l'aide de FFT en opérant un banc de multiplications scalaires dans le domaine fréquentiel

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = (\mathbf{F}\mathbf{x}) \odot (\mathbf{F}\mathbf{y})$$

- ⊗ produit de Schur (c'est-à-dire composante par composante)



Légitimité de la redondance choisie ?

- ✓ **Question** : pertinence du CP ou ZP pour transformer une convolution linéaire en circulaire sur une partie du signal reçu
- ✓ **Cette opération met en œuvre deux mécanismes :**
 - ❶ la suppression de l'IEB,
 - ❷ le repliement de la matrice Toeplitz C_{ISI} en une matrice circulaire



Suppression de l'IEB

✓ En pratique la suppression de l'IEB s'effectue de la manière suivante :

① CP : au niveau du RX en jetant les D premiers échantillons reçus $\mathbf{S}_{CP} := \left[\mathbf{0}_{N,D} \mid \mathbf{I}_N \right] :$

$$\mathbf{r}_N^{\text{CP}}(k) = \mathbf{S}_{CP} \mathbf{r}_P^{\text{CP}}(k).$$

② ZP : au TX lors de l'insertion des D zéros $\mathbf{M}_{ZP} := \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \\ \mathbf{0}_{D,N} \end{bmatrix} : \mathbf{s}_P^{\text{ZP}}(k) = \mathbf{M}_{ZP} \mathbf{s}_N^{\text{ZP}}(k).$

✓ IEB éliminée en exploitant au TX/RX que les D premières/dernières lignes/colonnes de $\mathbf{C}_{\text{IBI}}(P)$ sont nulles



Suppression de l'IEB

Suppression au RX du CP
↓

$$\text{CP} \quad \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \hline I_N \end{array}} \\ \text{S}_{\text{CP}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 0_{D \times N} \\ \hline 0_{N \times P} \end{array}} \\ \text{C}_{\text{IEB}} \end{array} = \boxed{0_{N \times P}}$$

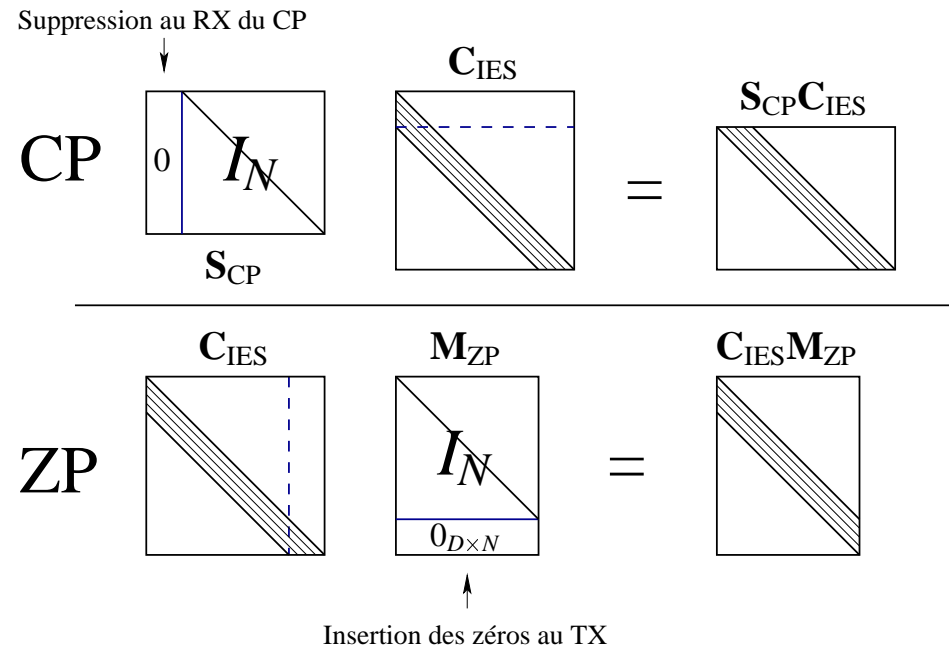
$$\text{ZP} \quad \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 0_{D \times N} \\ \hline 0_{N \times P} \end{array}} \\ \text{C}_{\text{IEB}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} I_N \\ \hline 0_{D \times N} \end{array}} \\ \text{M}_{\text{ZP}} \end{array} = \boxed{0_{P \times N}}$$

↑
Insertion des zéros au TX



Effet de l'annulation de l'IEB sur l'IES

✓ Répercussion de la suppression de l'IEB sur la matrice d'IES :



✓ Opérations exécutées pour supprimer l'IEB transforment la matrice carrée Toeplitz représentant l'IES en une matrice de Sylvester

- ✗ CP : rectangulaire horizontale $S_{CP}C_{ISI}$ (puisque des échantillons sont supprimés)
- ✗ ZP : rectangulaire verticale $C_{ISI}M_{ZP}$ (car l'insertion des zéros supprime l'influence des colonnes de droite de $C_{IBI}(P)$)



Repliement de la matrice d'IES en une matrice circulaire

- ✓ **Motivation** : récupération des données nécessite une inversion matricielle dont le coût arithmétique est prohibitif pour les systèmes à haut débit
- ✓ **Solution** : plonger le problème dans le domaine fréquentiel après circularisation
- ✓ **Astuce** : rabattre par un opérateur de repliement une partie de la matrice de filtrage de façon à obtenir une matrice circulaire



Repliement de la matrice d'IES en une matrice circulaire

- ❶ CP : au TX, la structure particulière du préfixe (la fin et le début du bloc coïncident) vient replier la partie gauche de la matrice d'IES de dimension P , la transformant en une matrice circulaire de taille N .

$$\mathbf{s}_P^{\text{CP}}(k) = \mathbf{M}_{\text{CP}} \mathbf{s}_N^{\text{CP}}(k), \mathbf{M}_{\text{CP}} := \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{D,N-D} & \mathbf{I}_D \\ \hline & \mathbf{I}_N \end{array} \right]$$

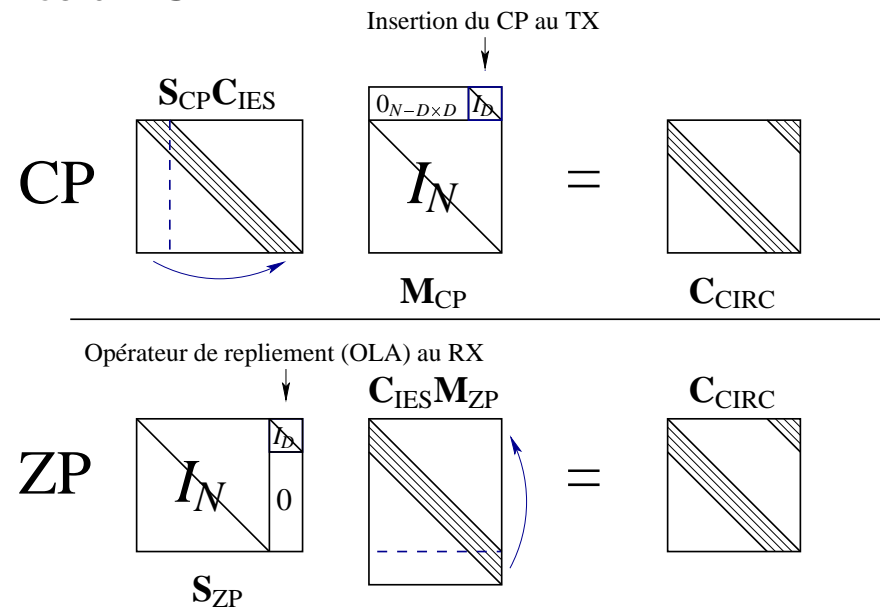
- ❷ ZP : au RX, la partie inférieure de la matrice de filtrage est repliée en remplaçant les D premiers échantillons du bloc reçu par leur sommation avec les D derniers

$$\mathbf{r}_N^{\text{ZP}}(k) = \mathbf{S}_{\text{ZP}} \mathbf{r}_P^{\text{ZP}}(k), \mathbf{S}_{\text{ZP}} := \left[\begin{array}{c|c} & \mathbf{I}_D \\ \hline \mathbf{I}_N & \mathbf{0}_{N-D,D} \end{array} \right]$$



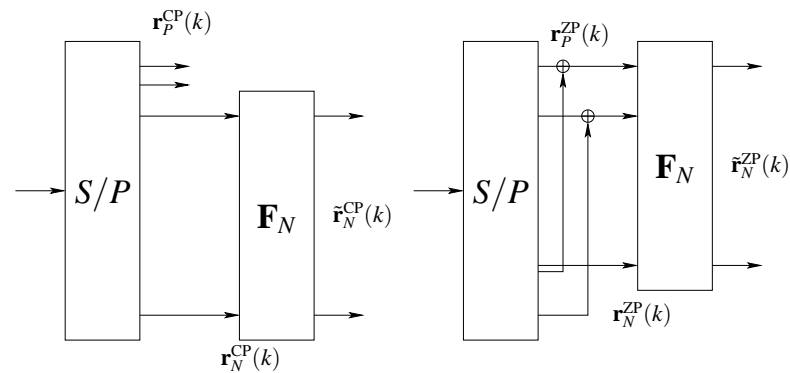
Repliement de la matrice d'IES en une matrice circulaire

✓ Circularisation de la matrice d'IES



Repliement de la matrice d'IES en une matrice circulaire

- ✓ OLA/OLS : démodulateurs CP et ZP



- ✓ Aussi bien pour le CP que ZP signal reçu sans bruit :

$$\mathbf{r}_N(k) = \mathbf{C}_{\text{CIRC}}(N) \mathbf{F}_N^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_N(k)$$

- ✓ Récupération des données ne requiert que l'inversion de $\mathbf{C}_{\text{CIRC}}(N)$

$$\mathbf{F}_N \mathbf{C}_{\text{CIRC}} \mathbf{F}_N^{-1} = \sqrt{N} \text{diag}(\mathbf{F}_N \mathbf{c}) = \text{diag}(\tilde{\mathbf{c}}_N)$$

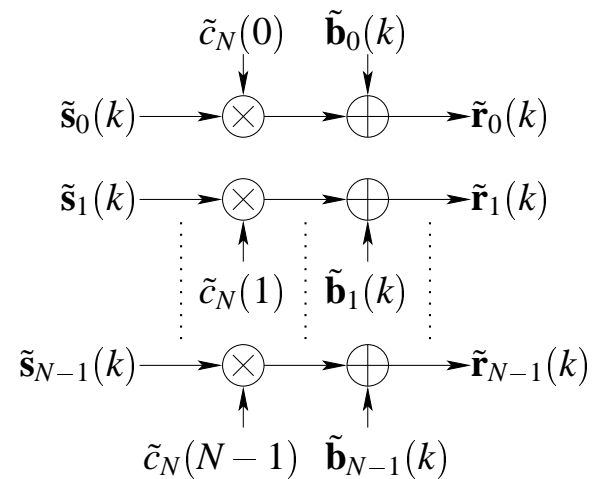
où $\tilde{\mathbf{c}}_N := [\tilde{c}_N(0), \dots, \tilde{c}_N(N-1)]^T := \sqrt{N} \mathbf{F}_N [c_0, \dots, c_D, 0, \dots, 0]^T$.

- 👉 **Miracle?** Le démodulateur OFDM incorporant lui aussi une transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_N(k) &:= \mathbf{F}_N \mathbf{r}_N(k) = \mathbf{F}_N \mathbf{C}_{\text{CIRC}}(N) \mathbf{F}_N^H \tilde{\mathbf{s}}_N(k) = \text{diag}(\tilde{\mathbf{c}}_N) \tilde{\mathbf{s}}_N(k) \\ &= [\tilde{c}_N(0) \tilde{s}_0(k), \dots, \tilde{c}_N(N-1) \tilde{s}_{N-1}(k)]^T \end{aligned}$$

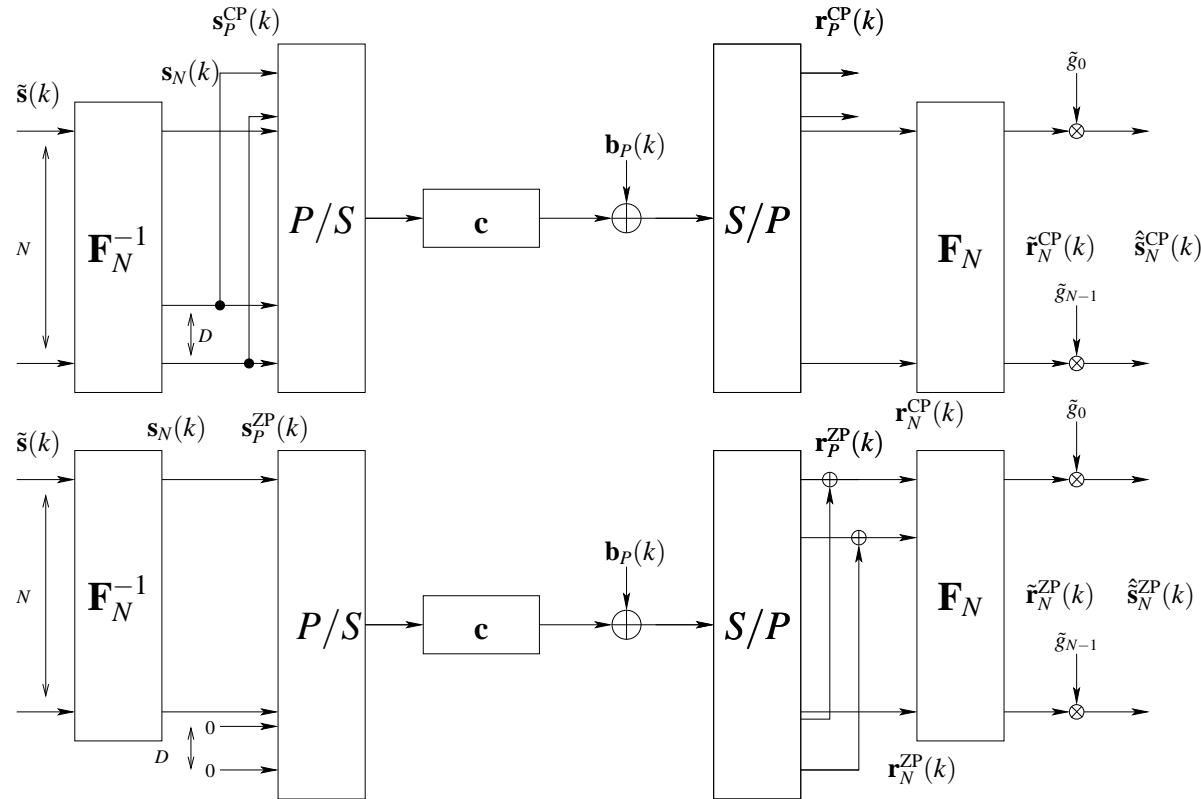


- ✓ **Après démodulation** : sur chacune des sous-bandes le symbole recherché est multiplié par une constante scalaire
- ✓ **Un système CP/ZP-OFDM OLS/OLA vu dans le domaine fréquentiel** : des canaux parallèles indépendants



Un premier schéma d'égalisation

- ✓ Émetteur et récepteur ZP-OFDM et CP-OFDM comprenant l'égaliseur :



Dualité des systèmes CP-OFDM et ZP-OFDM présentés

- ✓ Récapitulatif des relations de dualité entre les précodeurs CP et ZP

<i>Modulateur</i>	<i>Repliement circulaire de l'IES</i>		<i>Suppression de l'IEB</i>	
CP-OFDM	à l'émetteur		au récepteur	
ZP-OFDM	au récepteur		à l'émetteur	
<i>Modulateur</i>	<i>Introduction de redondance au TX</i>		<i>Suppression de la redondance au RX</i>	
CP-OFDM	$\mathbf{M}_{CP} =$	$\frac{\mathbf{0}_{D,N-D} \mid \mathbf{I}_D}{\mathbf{I}_N}$	$= \mathbf{J}\mathbf{S}_{ZP}^T$	$\mathbf{S}_{CP} = \left[\mathbf{0}_{N,D} \mid \mathbf{I}_N \right] = \mathbf{J}\mathbf{M}_{ZP}^T$
ZP-OFDM	$\mathbf{M}_{ZP} =$	$\frac{\mathbf{I}_N}{\mathbf{0}_{D,N}}$	$\mathbf{J}\mathbf{S}_{CP}^T$	$\mathbf{S}_{ZP} = \left[\mathbf{I}_N \mid \frac{\mathbf{I}_D}{\mathbf{0}_{N-D,D}} \right] = \mathbf{J}\mathbf{M}_{CP}^T$



Un égaliseur pour le modulateur ZP-OFDM garantissant la récupération des symboles émis

- ✓ **Problème** : lorsque un zéro du canal est localisé sur une porteuse on perd irrémédiablement l'information sans codage
- ✓ **Idée** : ne pas gaspiller l'information utile, exploiter tout les échantillons du bloc reçu et travailler avec une grille de résolution fréquentielle plus importante
- ✓ **Astuce** : $P = N + D$ équations sont disponibles pour récupérer N inconnues et le canal peut "éteindre" au plus D porteuses.
- 👉 **Remarque** : opération possible seulement pour le ZP-OFDM

$$\mathbf{r}_P(k) = \underbrace{\mathbf{C}_{\text{ISI}}(P)\mathbf{M}_{\text{ZP}}}_{\mathbf{H}} \mathbf{F}_N^H \tilde{\mathbf{s}}_N(k)$$

- ✓ **Avantage ZP** : vecteur reçu de taille P ne comporte pas de terme d'IEB : $\mathbf{C}_{\text{IBI}}\mathbf{M}_{\text{ZP}} = \mathbf{0}$



Égaliseur ZP garantissant la récupération des symboles

$$\mathbf{H} := \mathbf{C}_{\text{ISI}}(P)\mathbf{M}_{\text{ZP}} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} c_0 & 0 & \rightarrow & 0 & 0 & \rightarrow & 0 \\ \vdots & \searrow & \searrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ c_{D-1} & \ddots & \searrow & 0 & \downarrow & & \downarrow \\ c_D & \searrow & \ddots & c_0 & 0 & & \downarrow \\ 0 & \searrow & \searrow & \vdots & c_0 & \searrow & \downarrow \\ \downarrow & \searrow & \searrow & c_{D-1} & \vdots & \searrow & 0 \\ 0 & \rightarrow & 0 & c_D & c_{D-1} & \cdots & c_0 \end{array} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \\ \mathbf{0}_{D,N} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & \rightarrow & 0 \\ \vdots & \searrow & \searrow & \downarrow \\ c_D & & \searrow & 0 \\ 0 & \searrow & & c_0 \\ \downarrow & \searrow & \searrow & \vdots \\ 0 & \rightarrow & 0 & c_D \end{bmatrix}_{P \times N}$$

- ✓ **Observation** : \mathbf{H} est de rang colonne plein
- ✓ **Conclusion** : toujours possible en absence de bruit de retrouver les données émises !



Et avec le bruit ?

- ✓ **Problème** : estimer les symboles $\tilde{\mathbf{s}}_N(k)$ à partir des données bruitées reçues,

$$\mathbf{r}_P(k) = \mathbf{H}\mathbf{F}_N^H \tilde{\mathbf{s}}_N(k) + \mathbf{b}_P(k)$$

- ✓ **Approches possible** : égaliseurs ZF/MMSE/ML
- ✓ **Observation** : puisque plus d'équations que d'inconnues il existe plusieurs solutions pour chaque critère envisagé...
- ✓ **Exemple ZF** : on prend celui qui génère la MSE de norme minimale (Moore Penrose)

$$\hat{\tilde{\mathbf{s}}}_N(k) := \mathbf{G}\mathbf{r}_P(k), \mathbf{G}_{ZF} = \mathbf{F}_N\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{F}_N(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H$$

- ✓ **Exemple MMSE** : $\mathbf{G}_{MMSE} = \mathbf{F}_N\mathbf{H}^H \left(\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I}_P \right)^{-1}$
- ✓ **Intérêt** : atteindre des performances nettement supérieures aux structures d'égalisation rapides à base de FFT ; être plus robuste à la position des zéros du canal de transmission
- ✓ **Frein** : coût prohibitif en complexité



Une structure rapide garantissant la récupération des données

- ✓ **Alors comment faire ?** Ne pas choisir une solution de norme minimale et remarquer que le bloc de taille $D \times N$ inférieur de la matrice \mathbf{M}_{ZP} est nul comme les données émises

$$\mathbf{r}_P(k) = \mathbf{C}_{\text{ISI}}(P)\mathbf{M}_{ZP\mathbf{S}_N}(k)$$

- ✓ **Astuce :** remplacer à loisir les D colonnes de droite de la matrice $\mathbf{C}_{\text{ISI}}(P)$
- ✓ **Proposition :** remplacer $\mathbf{C}_{\text{ISI}}(P)$ par $\mathbf{C}_{\text{CIRC}}(P)$

$$\mathbf{r}_P(k) = \mathbf{C}_{\text{CIRC}}(P)\mathbf{M}_{ZP\mathbf{S}_N}(k)$$



- ✓ **Diagonalisation par Fourier de taille P (grille freq. plus dense) :**

$$\mathbf{F}_P \mathbf{C}_{\text{CIRC}}(P) \mathbf{F}_P^H = \text{diag}(\tilde{\mathbf{c}}_P)$$

$$\tilde{\mathbf{c}}_P := [\tilde{c}_P(0), \dots, \tilde{c}_P(P-1)]^T := \sqrt{P} \mathbf{F}_P [c_0, \dots, c_D, 0, \dots, 0]^T$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_P(k) := \mathbf{F}_P \mathbf{r}_P(k)$$

$$= \underbrace{\text{diag}(\tilde{\mathbf{c}}_P)}_{\mathbf{D}_P} \underbrace{\mathbf{F}_P \mathbf{M}_{\text{ZP}} \mathbf{F}_N}_{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{s}}_N(k)$$

$$\mathbf{D}_P := \text{diag}(\tilde{\mathbf{c}}_P), \mathbf{V} := \mathbf{F}_P \mathbf{M}_{\text{ZP}} \mathbf{F}_N$$

- ✓ **Hypothèse :** canal dans le domaine fréquentiel de résolution P n'a pas de composante nulle, $\forall 0 \leq i < P, \tilde{\mathbf{c}}_P(i) \neq 0$

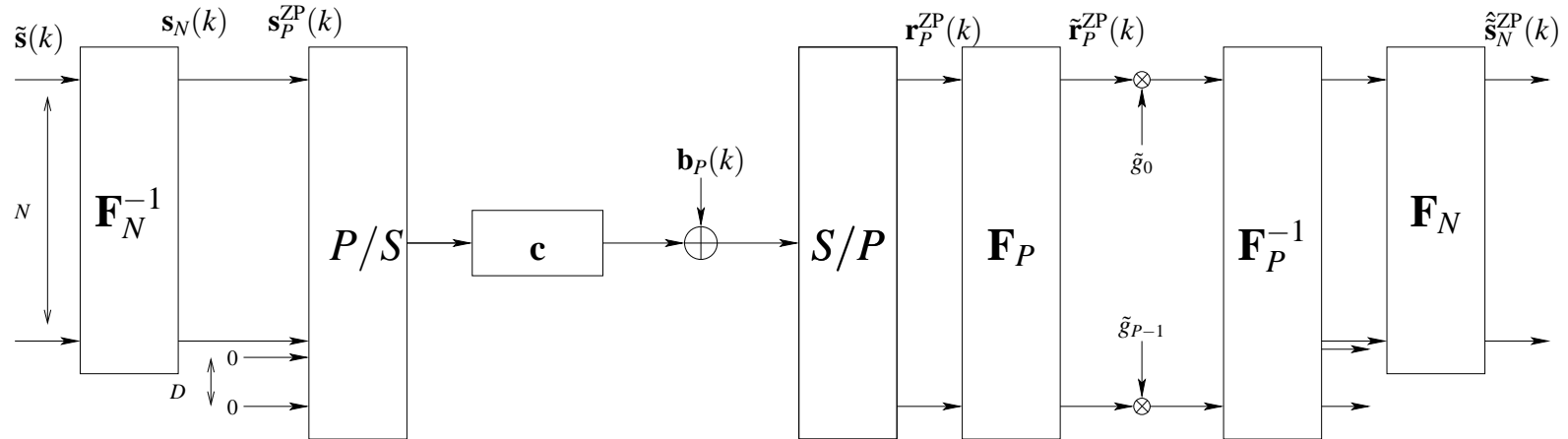
$$\tilde{\mathbf{s}}_N(k) = \mathbf{V}^\dagger \mathbf{D}_P^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_P(k)$$

- ✓ **Implémentation :** précalculer \mathbf{V}^\dagger rapide à base de 2 FFTs de taille N et P

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_N^{-1} \\ \mathbf{0}_{D,N} \end{bmatrix} \mathbf{F}_P \Rightarrow \mathbf{V}^\dagger = [\mathbf{F}_N, \mathbf{0}_{N,D}] \mathbf{F}_P^{-1}$$



✓ Structure d'égalisation rapide de type ZF mais non MMSE : $\mathbf{G}_{ZF} := \mathbf{V}^\dagger \mathbf{D}_P^{-1} \mathbf{F}_P$



Remarques :

- ✗ dans le cas général $(\mathbf{D}_P \mathbf{V})^\dagger \neq \mathbf{V}^\dagger \mathbf{D}_P^\dagger$ sauf si pas de zéros sur la grille de résolution P
- ✗ \mathbf{V} ne dépend pas du canal : et ne nécessite qu'une inversion (pré-calculée)



Un égaliseur MMSE rapide trafiqué sous optimal

- ✓ **But** : ne pas souffrir d'amplification de bruit intempestive
- ✓ **Solution** : adopter une sorte d'estimation MMSE de la structure diagonale d'égalisation $\tilde{\mathbf{g}}_P$ en effectuant une estimation MMSE en réception $\hat{\mathbf{y}}(k)$ de $\tilde{\mathbf{y}}_P(k) := \mathbf{V}\tilde{\mathbf{s}}_N(k)$ plutôt que son estimation ZF $\mathbf{D}_P^\dagger \tilde{\mathbf{r}}_P(k)$.

si $\tilde{\mathbf{y}}_P(k) = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{s}}_P(k) + \tilde{\mathbf{b}}_P(k)$, $\tilde{\mathbf{r}}_P(k) = \mathbf{D}_P\tilde{\mathbf{y}}(k)$, $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{s}},\tilde{\mathbf{s}}} := \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{s}}_N(k)\tilde{\mathbf{s}}_N(k)^H]$ alors

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}}_P(k) &= \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{y}}_P(k)\tilde{\mathbf{r}}_P^H(k)]\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{r}}_P(k)\tilde{\mathbf{r}}_P^H(k)]^{-1}\tilde{\mathbf{r}}_P(k) \\ &= \mathbf{V}\mathbf{V}^H\mathbf{D}_P^H[\sigma_b^2\mathbf{I} + \mathbf{D}_P\mathbf{V}\mathbf{V}^H\mathbf{D}_P^H]^{-1}\tilde{\mathbf{r}}_P(k)\end{aligned}$$

$$\text{Approximation : } \mathbf{V}\mathbf{V}^H = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_N \\ \mathbf{0}_{D,N} \end{bmatrix} \mathbf{F}_P\mathbf{F}_P^{-1}[\mathbf{F}_N, \mathbf{0}_{N,D}] = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & \mathbf{0}_{N,D} \\ \mathbf{0}_{D,P} \end{bmatrix} \approx \frac{N}{P}\mathbf{I}_P$$

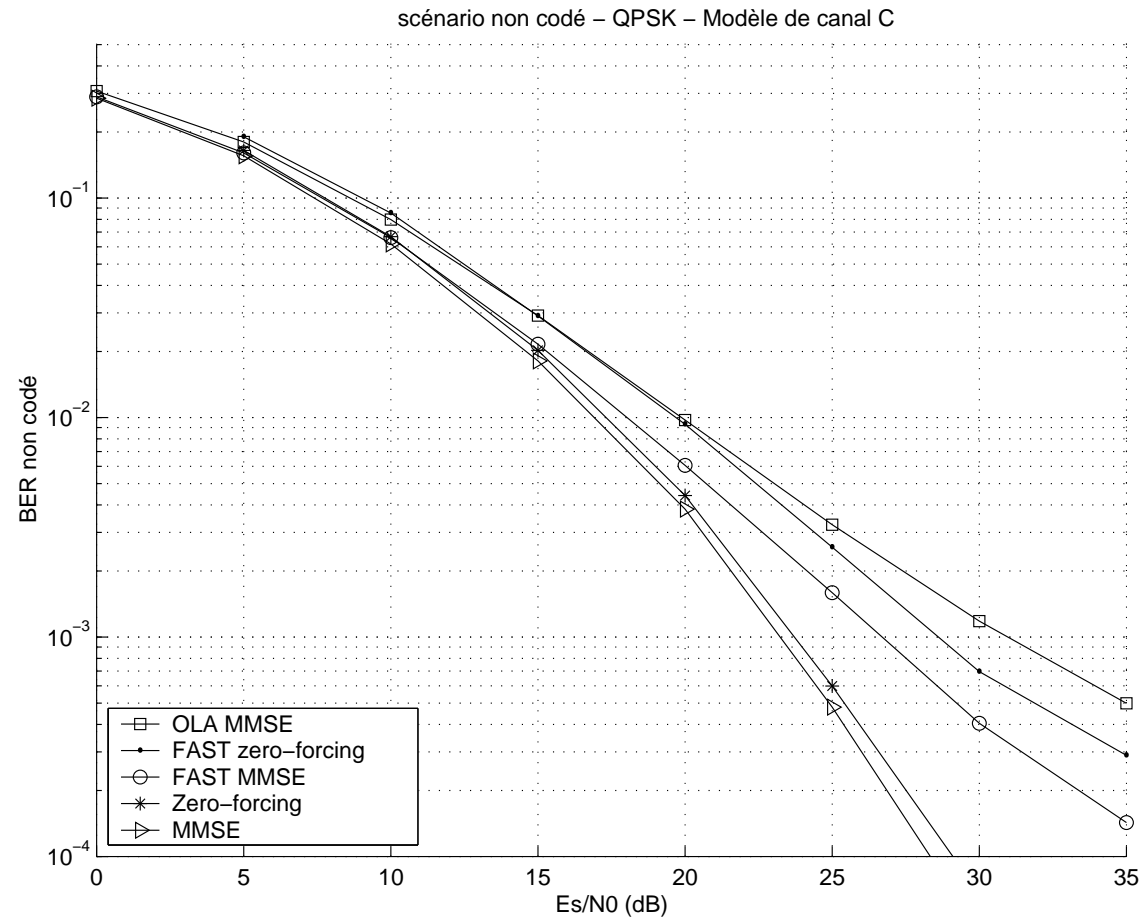
- ✓ **Conséquence** : obtention de l'estimateur requiert seulement l'inversion d'une matrice diagonale :

$$\hat{\mathbf{y}}_P(k) \approx \mathbf{D}_P[\mathbf{D}_P\mathbf{D}_P^H + \frac{P}{N}\sigma_b^2\mathbf{I}]^{-1}\tilde{\mathbf{r}}_P(k)$$



Performances

- ✓ **Contexte** : système OFDM sur 20MHz opérant à 5.2GHz, $N = 64$ porteuses, un pre/post-fixe de $D = 16$ échantillons, constellation QPSK, code convolutif



Complexité

- ✓ **Contexte** : 20MHz OFDM system operating at 5.2GHz, $N = 64$ carriers $D = 16$ samples pre/post-fixe, QPSK, code convolutif

<i>Type d'opération</i>	<i>CP-OLS ou ZP-OLA</i>	<i>FAST-ZF</i>	<i>FAST-MMSE</i>	<i>ZF et MMSE</i>
Multiplications réelles	388	716	1196	15360
Additions réelles	1156	3532	4172	15518
Divisions complexes	Aucune	80	80	Aucune



- ✓ **Cas du CP-OFDM** : $s_n(k) = s_{n+kP}$, $0 \leq n < P$, puisque les échantillons de début du bloc sont obtenus par duplication,

$$s_n(k) = s_{n+N}(k), 0 \leq n < D, \mathbb{E} [s_{kP} s_{N+kP}^*] = \mathbb{E} [s_0(k) s_N^*(k)] = 1$$

- ✓ Indépendance des symboles OFDM : $\mathbb{E} [s_{D+kP} s_{(k+1)P}^*] = \mathbb{E} [s_D(k) s_0^*(k+1)] = 0$.
- ➔ corrélation entre 2 échantillons temporels distants de N n'est pas indépendante du temps...
- ✓ **Définition** : Un processus aléatoire discret $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dit cyclostationnaire ou Périodiquement Corrélé (PC) de période $P \in \mathbb{N}$ si et seulement si sa fonction d'autocorrélation,

$$R_{s,s}(n, k) = \mathbb{E} [s_{n+k} s_n^*]$$

est périodique de période P par rapport à la variable n :

$$R_{s,s}(n + P, k) = R_{s,s}(n, k)$$



Les modulateurs CP-OFDM et ZP-OFDM génèrent un signal cyclostationnaire

✓ **Considérons** : blocs taille P , $s_n(k) = s_{n+kP}$, $0 \leq n < P$,

✓ **CP-OFDM** : échantillons du début du bloc = fin

$$s_n(k) = s_{n+N}(k), 0 \leq n < D \text{ et } E [s_{kP} s_{N+kP}^*] = E [s_0(k) s_N^*(k)] = 1$$

✓ **ZP-OFDM** : fin de bloc toujours nul

$$s_{n+N}(k), 0 \leq n < D \text{ donc } E [s_{kP} s_{N+kP}^*] = E [s_0(k) s_N^*(k)] = 0$$

✓ **Par construction** : 2 blocs de symboles émis sont indépendants et identiquement distribués

✗ $E [s_P(k) s_P^H(k')] = \mathbf{0}_{P \times P}$ pour $k \neq k'$,

✗ $\mathbf{R}_{s,s}(P) = E [s_P(k) s_P^H(k)]$ ne dépend pas de l'indice du bloc k .

✓ **Conclusion** : signal temporel émis s_n est cyclostationnaire de période la taille de bloc : P .

👉 **Remarque** : le “spectre OFDM” n'est autre que le cyclopectre d'ordre 0.



Identification aveugle du canal de transmission : méthode directe pour le modulateur CP-OFDM

- ✓ **But** : montrer qu'il est possible d'identifier le canal de transmission sans introduire de données pilotes
- ✓ **Méthode** :
 - ✗ exploiter les statistiques d'ordre 2 du signal *complet* reçu (sans jeter le CP)
 - ✗ le filtrage linéaire preserve la cyclostationnarité
 - ✗ déduire des cyclocorrélations $\mathbf{R}_{r,r}$ les coefficients du canal
- ✓ **Rappel** : bloc reçu $\mathbf{r}_P^{\text{CP}}(k) = \mathbf{C}_{\text{ISI}}(P)\mathbf{M}_{\text{CPS}_N}(k) + \mathbf{C}_{\text{IBI}}(P)\mathbf{M}_{\text{CPS}_N}(k-1) + \mathbf{b}_P(k)$
- ✓ **Calculons** : $\mathbf{R}_{r,r} = \text{E} [\mathbf{r}_P(k)\mathbf{r}_P(k)^H]$

$$\mathbf{R}_{r,r} = \mathbf{C}_{\text{ISI}}\mathbf{M}_{\text{CP}}\mathbf{R}_{\tilde{s},\tilde{s}}\mathbf{M}_{\text{CP}}^H\mathbf{C}_{\text{ISI}}^H + \mathbf{C}_{\text{IBI}}\mathbf{M}_{\text{CP}}\mathbf{R}_{\tilde{s},\tilde{s}}\mathbf{M}_{\text{CP}}^H\mathbf{C}_{\text{IBI}}^H + \sigma_b^2\mathbf{I}_P$$



✓ Hypothèse : échantillonnage critique, $\mathbf{R}_{\tilde{s},\tilde{s}} = \sigma_{\tilde{s}}^2 \mathbf{I}_N$, calcul par bloc

$$\mathbf{R}_{\mathbf{r},\mathbf{r}} = \mathbf{C}_{\text{ISI}} \mathbf{M}_{\text{CP}} \mathbf{M}_{\text{CP}}^H \mathbf{C}_{\text{ISI}}^H + \mathbf{C}_{\text{IBI}} \mathbf{M}_{\text{CP}} \mathbf{M}_{\text{CP}}^H \mathbf{C}_{\text{IBI}}^H + \sigma_b^2 \mathbf{I}_P$$

$$\text{or } \Lambda := \mathbf{M}_{\text{CP}} \mathbf{M}_{\text{CP}}^H = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{D,N-D} & \mathbf{I}_D \\ \hline & \mathbf{I}_N \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{N-D,D} & \\ \hline & \mathbf{I}_D \end{array} \right] \mathbf{I}_N$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I}_D & & \mathbf{I}_D \\ \hline \mathbf{0}_{N,D} & \mathbf{0}_{P,N-D} & \mathbf{0}_{N,D} \\ \hline \mathbf{I}_D & & \mathbf{I}_D \end{array} \right]_{P \times P}$$

👉 Remarque invariance de \mathbf{C}_{ISI} ou \mathbf{C}_{IBI} par produit à gauche ou à droite par Λ ,

$$\mathbf{C}_{\text{ISI}} \Lambda \mathbf{C}_{\text{ISI}}^H = \mathbf{C}_{\text{ISI}} \mathbf{C}_{\text{ISI}}^H, \text{ et } \mathbf{C}_{\text{IBI}} \Lambda \mathbf{C}_{\text{IBI}}^H = \mathbf{C}_{\text{IBI}} \mathbf{C}_{\text{IBI}}^H$$



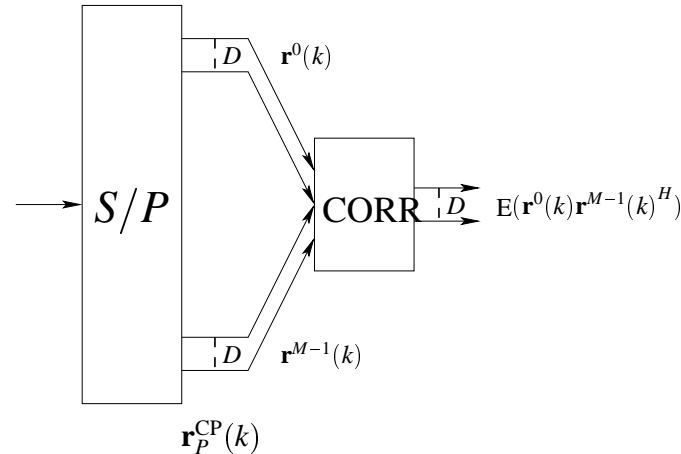
- ✓ **Hypothèse** : sans perte de généralité supposons $m = \frac{N}{D} \in \mathbb{N}$ entier
- ✓ **Division** : du vecteur reçu en m blocs consécutifs de taille D , $\mathbf{r}_P(k) = [\mathbf{r}^0(k)^T \dots \mathbf{r}^{m-1}(k)^T]^T$
- ✓ **Procédure** : isolation du bloc inférieur gauche $D \times D$ de la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{r},\mathbf{r}}(P)$

$$\mathbf{R}_{m-1,0} := \mathbb{E} \left[\mathbf{r}^{m-1}(k) \mathbf{r}^0(k)^H \right] = \mathbf{C}_{\text{ISI}}(D) \mathbf{C}_{\text{ISI}}(D)^H$$

- ✓ **Rappel** : $\mathbf{C}_{\text{ISI}}(D)$ Toeplitz triangulaire inférieure de première colonne $[c_0, \dots, c_{D-1}]^T$
- ✓ **Observation** : première ligne de la matrice $\mathbf{C}_{\text{ISI}}(D) \mathbf{C}_{\text{ISI}}(D)^H$ est égale à $c_0^*(c_0, \dots, c_{D-1})$, le vecteur du canal multiplié par une constante.
- ✓ **Conclusion** : possibilité d'estimer le canal à une phase près à partir de la matrice d'autocorrélation du signal reçu



Corrélateur en réception pour identification du canal



Remarques :

- ✘ **pratique** : matrice $\mathbf{R}_{m-1,0}$ estimée par moyennage temporel sur une fenêtre de longueur I , $\hat{\mathbf{R}}_{m-1,0}^{(I)} = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \mathbf{r}^{m-1}(i) \mathbf{r}^0(i)^H$
- ✘ comme le signal est ergodique, $\hat{\mathbf{R}}_{m-1,0}^{(I)}$ converge vers $\mathbf{R}_{m-1,0}^{(I)}$ en moyenne quadratique
- ✘ si le bruit est blanc seuls éléments diagonaux $\mathbf{R}_{r,r}$ corrompus, la méthode, garantie théorique l'immunité statistique au bruit blanc.



✓ **Extensions :**

- ✗ exploiter complètement la structure de $E \left(\mathbf{r}^{m-1}(k) \mathbf{r}^0(k)^H \right) = \mathbf{C}_{\text{ISI}}(D) \mathbf{C}_{\text{ISI}}(D)^H$ en effectuant une décomposition de Choleski de l'estimée ergodique de $E \left(\mathbf{r}^{m-1}(k) \mathbf{r}^0(k)^H \right)$.
- ✗ convergence lente en $O(1/I^2)$: intérêt de bénéficier d'une initialisation pour opérer un mode de poursuite semi-aveugle



Identification aveugle du canal de transmission : méthode sous-espace pour le modulateur ZP-OFDM

- ✓ **Principe** : méthode sous espace pour le modulateur ZP à partir de l'observation du signal reçu $\mathbf{r}_P(k)$
- ✓ **Avantages** :
 - ✗ garantit en absence de bruit estimation parfaite du canal après l'observation d'un nombre fini de blocs d'échantillons reçus ;
 - ✗ applicable à n'importe quelle constellation ;
 - ✗ assure "l'identifiabilité du canal".



✓ **Simplification** : absence de bruit pour clarté d'explication

✓ **Rappel** : $\mathbf{r}_P(k) = \mathbf{H}\mathbf{F}_N^H \tilde{\mathbf{s}}_N(k)$, \mathbf{H} Toeplitz $P \times N$, rang colonne plein : $\text{rg}(\mathbf{H}) = N$.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & \rightarrow & 0 \\ \vdots & \searrow & \searrow & \downarrow \\ c_D & & \searrow & 0 \\ 0 & \searrow & & c_0 \\ \downarrow & \searrow & \searrow & \vdots \\ 0 & \rightarrow & 0 & c_D \end{bmatrix}_{P \times N}$$

✓ **Méthode** : observer un nombre de vecteurs de symboles reçus $\mathbf{r}_P(k)$ suffisant pour obtenir assez d'équations afin d'estimer \mathbf{c} connaissant la structure de la matrice \mathbf{H} .



Méthode sous espace algébrique pour le ZP-OFDM

- ✓ **But** : former un système d'équations dont le canal est l'unique solution.
- ✓ **Considérons** : empilement de symboles fréquentiels émis $\mathbf{S}_K = [\tilde{\mathbf{s}}(0), \dots, \tilde{\mathbf{s}}(K-1)]_{N \times K}$ avec $K > N$ tel que matrice \mathbf{S}_K rang plein $\text{rg}(\mathbf{S}_K) = N$.
- ✓ N grand \Rightarrow par densité consécutivement c'est presque toujours le cas.
- ✓ \mathbf{S}_K matrice plus large que haute et de rang plein $\Rightarrow \text{rg}(\mathbf{S}_K^H) = N$
- ➔ **La matrice de dimension** $N \times N$, $\mathbf{S}_K \mathbf{S}_K^H$ est donc inversible.
- ✓ **Définition** : $\mathbf{R}_K = [\mathbf{r}_P(0), \dots, \mathbf{r}_P(K-1)]$ bloc de symboles reçus correspondant à \mathbf{S}_K
- ✓ **Considérons** : matrice carrée $P \times P$ hermitienne $\mathbf{R}_K \mathbf{R}_K^H$:

$$\mathbf{R}_K \mathbf{R}_K^H = \underbrace{\mathbf{H}}_{P \times N} \underbrace{\mathbf{F}_N^H}_{N \times N} \underbrace{\mathbf{S}_K \mathbf{S}_K^H}_{N \times N} \underbrace{\mathbf{F}_N}_{N \times N} \underbrace{\mathbf{H}^H}_{N \times P}$$



👉 **Remarques :**

✘ \mathbf{F}_N , $\mathbf{S}_K \mathbf{S}_K^H$ et \mathbf{F}_N^H sont carrées et inversibles $\Rightarrow \text{Im}(\mathbf{R}_K \mathbf{R}_K^H) = \text{Im}(\mathbf{H} \mathbf{H}^H)$.

✘ \mathbf{H} matrice plus haute que large et de rang colonne plein \Rightarrow sa transconjugée est de même rang : $\text{rg}(\mathbf{H}^H) = N$.

➡ $\text{Im}(\mathbf{H} \mathbf{H}^H) = \text{Im}(\mathbf{H})$ donc $\mathbf{R}_K \mathbf{R}_K^H$ et \mathbf{H} ont même espace image $\text{Im}(\mathbf{R}_K \mathbf{R}_K^H) = \text{Im}(\mathbf{H}) \Rightarrow \text{rg}(\mathbf{H}) = N$, l'espace image de la matrice $\mathbf{R}_K \mathbf{R}_K^H$ a donc pour dimension N .

✓ **Propriété :** \forall matrice symétrique et en particulier $\mathbf{R}_K \mathbf{R}_K^H$, son noyau et son espace image sont orthogonaux et complémentaires

➡ $\text{Ker}(\mathbf{R}_K \mathbf{R}_K^H)$ a pour dimension $\dim \text{Ker}[\mathbf{R}_P(K) \mathbf{R}_P^H(K)] = P - \text{rg}(\mathbf{R}_K \mathbf{R}_K^H) = P - N = D$: la longueur maximale du canal.

✓ **Considérons :** une base $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_D]$ de $\text{Ker}[\mathbf{R}_P(K) \mathbf{R}_P^H(K)]$ (i.e. diagonalisation de $\mathbf{R}_K \mathbf{R}_K^H$, et isolement des vecteurs propres associés à VP 0).

✓ **Relation :** pour $\mathbf{R}_P(K) \mathbf{R}_P^H(K)$, orthogonalité entre le noyau \mathbf{U} et l'espace image $\text{Im}(\mathbf{H})$,

$$\mathbf{U}^H \mathbf{H} = \mathbf{0}$$

$$\forall 1 \leq i \leq D, \mathbf{u}_i^H \mathbf{H} = \mathbf{0}$$



👉 **Principe** : la redondance introduite par le ZP permet d'obtenir D équations d'orthogonalité tjrs suffisantes pour retrouver les coefficients du canal.

✓ **Démonstration** :

- ✗ transformation du système afin de l'exprimer en fonction des inconnues \mathbf{c}
- ✗ utilisation de la propriété de commutativité de la convolution
- ✗ interprétation de la dernière équation comme une relation de filtrage des vecteurs \mathbf{u}_i par le filtre \mathbf{c} matérialisé par la matrice de Sylvester $\mathbf{H}(\mathbf{c})$

$\mathbf{u}_i^H \mathbf{H}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}^H \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{0}$ où $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_i)$ matrice de Hankel définie par :

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_i) = \begin{bmatrix} u_i(0) & u_i(1) & \cdots & u_i(N-1) \\ u_i(1) & u_i(2) & \cdots & u_i(N) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_i(D-1) & u_i(D) & \cdots & u_i(P-1) \end{bmatrix}_{D \times N}$$

✓ **Action** : regroupement de l'ensemble des équations $\mathbf{c}^H \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_i)$ en un unique système linéaire

$$\mathbf{c}^H [\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_0), \cdots, \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_{D-1})] = \mathbf{0}_{1, DN}$$



Démonstration de l'unicité

- ✓ **Système obtenu :** $\mathbf{c}^H [\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_0), \dots, \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_{D-1})] = \mathbf{0}_{1,DN}$
- ✓ **But :** montrer que le canal de transmission est l'unique solution non nulle à un coefficient près
- ✓ **Démarche :** considérer deux solutions non nulles $\mathbf{c}_0 = [c_0^{(0)}, \dots, c_D^{(0)}]^T$ et $\mathbf{c}_1 = [c_0^{(1)}, \dots, c_D^{(1)}]^T$.
- ✓ **Notations :** $\mathbf{H}(\mathbf{c}_0)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{c}_1)$ matrices de filtrage associées à $c_0(z) = \sum_{i=0}^D c_i^{(0)} z^{-i}$ et $c_1(z) = \sum_{i=0}^D c_i^{(1)} z^{-i}$.
- ✓ **Démonstration :**
 - ✗ \mathbf{c}_0 et \mathbf{c}_1 sont solutions du système donc $\mathbf{U}^H \mathbf{H}(\mathbf{c}_0) = \mathbf{0} = \mathbf{U}^H \mathbf{H}(\mathbf{c}_1) = \mathbf{0}$



Démonstration de l'unicité

✘ désignons par ρ_1, \dots, ρ_D les D racines du polynôme de degré D $c_0(z) : \forall 1 \leq i \leq D,$

$$\begin{aligned} c_0(\rho_i) &= \sum_{k=0}^D c_k^{(0)} \rho_i^{-k} = 0 \\ &= (\rho_i^0, \dots, \rho_i^{-D})(c_0^{(0)}, \dots, c_{D-1}^{(0)})^T = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

✘ ainsi, puisque la matrice $\mathbf{H}(\mathbf{c}_0) =$

$$\begin{pmatrix} c_0^{(0)} & 0 & \rightarrow & 0 \\ \vdots & \searrow & \searrow & \downarrow \\ c_D^{(0)} & \ddots & \searrow & 0 \\ 0 & \searrow & \ddots & c_0^{(0)} \\ \downarrow & \searrow & \searrow & \vdots \\ \downarrow & & \searrow & c_D^{(0)} \\ 0 & \rightarrow & \rightarrow & 0 \end{pmatrix}_{P \times D}$$

$$(\rho_i^0, \dots, \rho_i^{-D})\mathbf{H}(\mathbf{c}_0) = \mathbf{0}_{N \times 1}$$

⇒ base du noyau de $\mathbf{H}(\mathbf{c}_0)$ donnée par les D vecteurs de Vandermonde $\mathbf{v}_i = [\rho_i^0, \dots, \rho_i^{-D}]^T$ associés aux D racines de $c_0(z)$.



Démonstration de l'unicité

- ✘ la matrice $\mathbf{V} := [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_D]$ partage donc la même image que \mathbf{U} : elles sont semblables et il existe ainsi une matrice inversible de changement de base \mathbf{A} tel que $\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{A}$.
- ✘ condition $\mathbf{U}^H \mathbf{H}(\mathbf{c}_1) = \mathbf{0}$ conduit alors à : $\mathbf{U}^H \mathbf{H}(\mathbf{c}_1) = \mathbf{A}^H \mathbf{V}^H \mathbf{H}(\mathbf{c}_1) = \mathbf{0}$ d'où $\mathbf{V}^H \mathbf{H}(\mathbf{c}_1) = \mathbf{0}$ (car \mathbf{A} est inversible).
- ✘ donc le polynôme $c_1(z)$ admet les mêmes racines que le polynôme $c_0(z)$ et sont du même ordre : ils sont proportionnels.
- ✘ toute solutions du système sont égales au canal à une constante scalaire près (QED \square).



Algorithme pratique

- ✓ **Question** : et l'influence de bruit dans tout ça ?
- ✓ **Solution** : substituer à l'approche déterministe précédente une approche stochastique et reconsidérer les équations en conduisant un raisonnement non plus instantané mais en moyenne.
- ✓ **Formalisation** : substituer à la matrice $\mathbf{R}_K \mathbf{R}_K^H$, la matrice d'autocorrélation du signal reçu suivante $\mathbf{R}_{r,r} = \mathbf{H} \mathbf{F}_N^H \mathbf{R}_{\tilde{s},\tilde{s}} \mathbf{F}_N \mathbf{H}^H + \mathbf{R}_{b,b}$ où $\mathbf{R}_{rr} := E[\mathbf{r}_P(k) \mathbf{r}_P^H(k)]$, $\mathbf{R}_{\tilde{s},\tilde{s}} := E[\tilde{\mathbf{s}}_N(k) \tilde{\mathbf{s}}_N^H(k)]$ et $\mathbf{R}_{b,b} := E[\mathbf{b}_P(k) \mathbf{b}_P^H(k)]$.
- ☞ **Propriétés** : symboles émis sont aléatoires $\Rightarrow \mathbf{R}_{\tilde{s},\tilde{s}}$ presque toujours de rang plein
- ✓ **Raisonnement** :
 - ✗ équations précédentes pour le calcul de la base du noyau de $\mathbf{R}_K \mathbf{R}_K^H$ sont valides en considérant une base du noyau de la matrice $\mathbf{H} \mathbf{F}_N^H \mathbf{R}_{\tilde{s},\tilde{s}} \mathbf{F}_N \mathbf{H}^H$
 - ✗ $\mathbf{R}_{r,r}$ représente une forme linéaire positive



Algorithme pratique

- ⇒ pour un bruit blanc de matrice d'autocorrélation $\mathbf{R}_{\mathbf{b},\mathbf{b}} = \sigma_b^2 \mathbf{I}_P$, une base $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_D]$ du noyau à gauche de la matrice $\mathbf{H}\mathbf{F}_N^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{s}},\tilde{\mathbf{s}}} \mathbf{F}_N \mathbf{H}^H$ s'obtient à partir de la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{r},\mathbf{r}}$ en considérant ses D vecteurs propres associés à la valeur propre minimale σ_b^2
- ⇒ possible d'estimer le canal en opérant une diagonalisation de la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{r},\mathbf{r}}$
- ✓ **Pratique** : $\mathbf{R}_{\mathbf{r},\mathbf{r}}$ estimée par moyennage temporel sur une fenêtre de longueur I ,

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r},\mathbf{r}}^{(I)} = \frac{1}{I} \sum_{k=0}^{I-1} \mathbf{r}_P(k) \mathbf{r}_P^H(k)$$

- ☞ **Observation** : on ne dispose que d'estimées $\hat{\mathbf{u}}_i$ des vecteurs du noyau de \mathbf{H} et les relations d'orthogonalité pour les $\hat{\mathbf{u}}_i$ sont vérifiées seulement approximativement !
- ✓ **Remède** : procéder à une résolution au sens des moindres carrés du système $\hat{\mathbf{c}}^H \underbrace{[\bar{\mathbf{U}}(\hat{\mathbf{u}}_0), \dots, \bar{\mathbf{U}}(\hat{\mathbf{u}}_{D-1})]}_{\bar{\mathbf{U}}} = \mathbf{0}_{1 \times DN}$ en partant des D vecteurs propres $\hat{\mathbf{u}}_0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{D-1}$ associées aux D valeurs propres minimales de $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r},\mathbf{r}}^{(I)}$

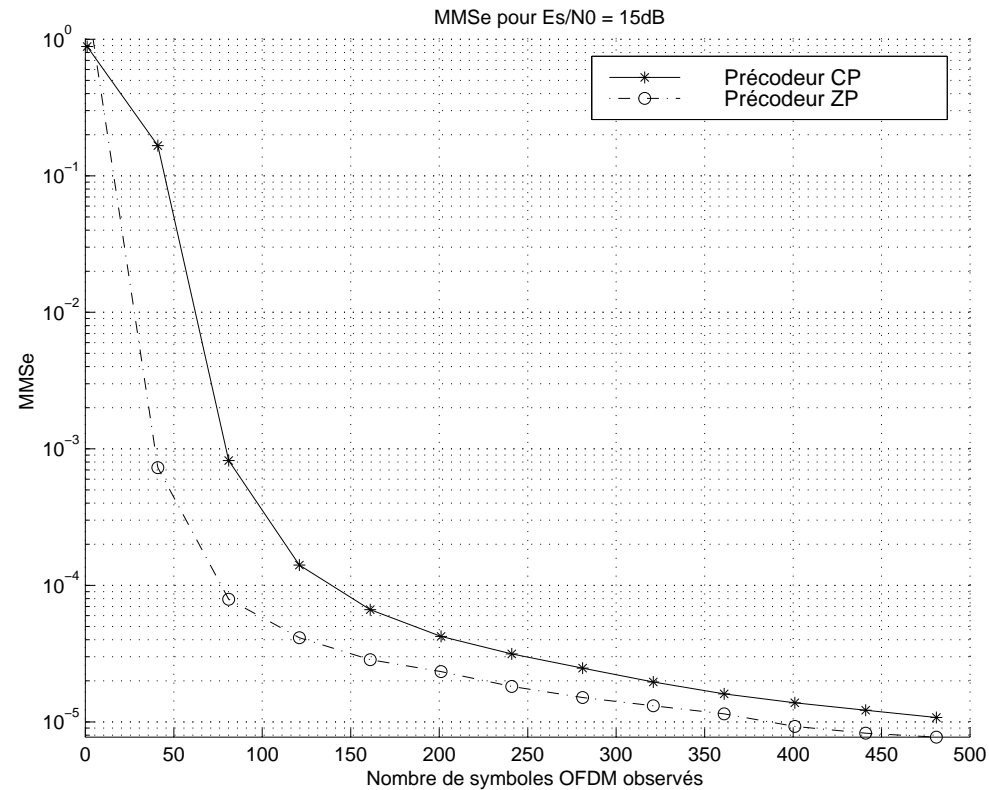


- ✓ Éviter la solution triviale nulle $\mathbf{c} = 0$: imposer la contrainte de norme 1 sur $\hat{\mathbf{c}}$
- ✓ **Solution** : minimum de la forme quadratique $\mathbf{c}^H \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^H \mathbf{c}$ sur la sphère unité, le vecteur propre de norme 1 associé à la valeur propre minimale de $\bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^H$.
- ✓ **Étapes de l'algorithme pratique** :
 - ❶ estimer $\mathbf{R}_{\mathbf{r},\mathbf{r}}$ par moyennage temporel : $\hat{\mathbf{R}}_{rr}^{(I)} = \frac{1}{I} \sum_{k=0}^{I-1} \mathbf{r}_P(k) \mathbf{r}_P^H(k)$;
 - ❷ diagonaliser $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r},\mathbf{r}}^{(I)}$ afin de déterminer une base $\hat{\mathbf{U}}$ du noyau de $\mathbf{H} \mathbf{F}_N^H \mathbf{R}_{\tilde{s},\tilde{s}} \mathbf{F}_N \mathbf{H}^H$ constituée des D vecteurs propres associés aux D valeurs propres les plus faibles de $\hat{\mathbf{R}}_{rr}^{(I)}$;
 - ❸ calculer la matrice de forme quadratique $\hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{U}}^H$ à partir de l'estimée du noyau $\hat{\mathbf{U}}$;
 - ❹ estimer le canal comme le vecteur propre de norme 1 associé à la valeur propre minimale de $\hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{U}}^H$.



Illustration de la performance des estimateurs aveugles

- ✓ Contexte de simulation : OFDM, $N = 32$ porteuses ; IG de $D = 8$ échantillons



- ✓ **Observation** : après réception de N symboles pour le ZP et $2N$ pour le CP, l'estimée du canal s'améliore très rapidement et devient très précise (lié aux nombres de symboles OFDM nécessaires pour que la matrice $\mathbf{S}_K \mathbf{S}_K^H$ atteigne un rang plein)



Résumé circularisation ZP-CP

